

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

I) Continuité

1) Continuité

Déf, pptés, Heine...

II) Dérivabilité

1)

Accroissements finis, Rolle etc

Baire

2) Continuité de la dérivée

Théorème de Darboux

Fonction à dérivée discontinue sur un ensemble dense

III) Continuité et dérivabilité à la limite

Convergences, théorèmes limites, séries...

IV) Intégration

Dérivabilité des intégrales, continuité...

V) Espaces de fonctions

SW, complétude etc

Développements :

1 - Fonction à dérivée discontinue sur un ensemble dense [Gou An 233] (***)

2 - SW [Analyse L3 141] (*)

3 - Th de Darboux, 3 méthodes [Gourdon] (**)

Bibliographie :

[Gou]

Mialet – Analyse à une variable réelle

Rapport du jury : un candidat qui indique dans son plan que l'ensemble des fonctions continues, nulle part dérivables contient un G -delta dense de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ doit pouvoir donner une telle fonction, ou du moins indiquer un principe de sa construction. Par ailleurs un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Certains développements intéressants mais techniques, comme la construction d'une fonction continue partout non dérivable, ou le théorème de Balagner-Colominas, sont à déconseiller fortement aux candidats moyens, et peuvent aboutir à des oraux *globalement catastrophiques*. Les candidats font beaucoup trop confiance à leur mémoire et pas assez à leur compréhension, ce qui leur vaut de rester embourbés au milieu d'un développement ambitieux, par exemple « théorème de Montel » ou bien « différentielle isométrique en tout point implique isométrique pour l'application elle-même ».

Questions du jury 2010 :

- le développement dyadique d'un nb est unique ? Pour quels réels le développement est ambigu ?
- Supp f dérivable en x. a-t-on $(f(y)-f(z))/(y-z)$ qui tend vers $f'(x)$ quand y et z tendent vers x ?
- Si f est dérivable en x, f admet elle un DL en x ?
- Mq convexe + dérivable = C^1
- Que sait-on sur la dérivabilité des fonctions convexes ?
- Si f est C^1 , f tend vers 0 en l'infini, quelle est la limite de f' ?
- Si on rajoute que f est positive et décroissante ?
- Trouver un autre ex de fct qui vérifie le th des valeurs intermédiaires